

# Etude de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu faible puissance

L'objectif de ce travail est de voir ou de revoir le principe des asservissements linéaires au travers de l'exemple d'un asservissement de vitesse.

Une simulation des résultats est proposée avec le logiciel Orcad 9.1.

La première partie met en évidence la nécessité du rebouclage de la sortie du montage, à savoir l'information vitesse, sur l'entrée, à savoir la consigne de vitesse.

On étudie ensuite les problèmes de stabilité posés par ce rebouclage et le compromis à trouver entre la stabilité, la précision et la rapidité.

Le système technique étudié entraîne une petite pompe destinée à un appareil médical. La pompe doit pouvoir tourner dans les deux sens à une vitesse précise fonction de la tension consigne de vitesse et passer le plus rapidement possible d'une vitesse à une autre, d'un sens à un autre.

Le moteur retenu pour entraîner la pompe est un moteur à courant continu de référence Escap 28D11219P, la documentation technique étant donnée en annexe.

## 1 Etude de l'ensemble moteur et charge

Afin de prévoir le comportement de cet ensemble, nous allons en déterminer un modèle équivalent. Côté électrique, on rappelle que le comportement du moteur est régi par l'équation différentielle suivante :

$$U = E + R I + L \frac{dI}{dt}$$

où  $U$  représente la tension d'alimentation,  $E$  la force électromotrice,  $R$  la résistance de l'induit,  $L$  l'inductance de l'induit et  $I$  le courant dans celui-ci.

Côté mécanique, nous avons l'équation suivante :

$$C_{MOT} - C_R = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega$$

où  $C_{MOT}$  (en Nm) est le couple exercé par le moteur,  $C_R$  le couple résistant de la charge, supposé indépendant de la vitesse  $\Omega$  (en rd/s),  $J$  (en  $\text{kgm}^2$ ) le moment d'inertie de l'ensemble moteur charge,  $f$  (en Nms) la constante de couple visqueux (donné au bas de la documentation). On supposera afin de simplifier que les termes  $J$  et  $f$  de la charge sont négligeables devant ceux du moteur.

La liaison entre les deux équations se fait par les équations électromécaniques du moteur :

$$E = K\Omega$$

$$C_{MOT} = KI$$

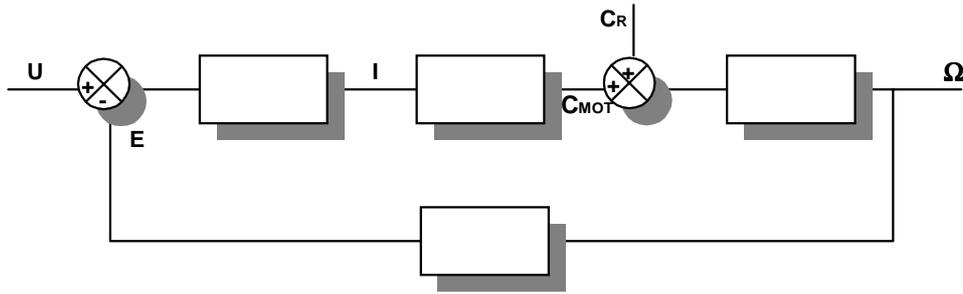
où  $K$  représente la constante de couple et de vitesse, ces deux constantes étant égales à condition de respecter les unités définies ci dessus. Pour écrire la dernière équation, on suppose les pertes du moteur limitées aux seules pertes joules.

Afin d'éviter des calculs fastidieux nous allons linéariser ces équations en utilisant la variable de Laplace  $p$ . Les propriétés principales de la transformation de Laplace sont données en annexe.

Quelles propriétés nous permettent cette linéarisation ?

Ecrire les équations précédentes dans le domaine de Laplace en prenant des conditions initiales nulles.

Compléter alors le schéma bloc ci-après.



Dans le cas d'un couple  $C_R$  nul, déterminer la fonction de transfert  $\Omega(p)/U(p)$  et la mettre sous la forme :

$$\frac{\Omega}{U} = \frac{K_M}{1 + 2m \frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}}$$

en déterminant la valeur littérale puis numérique de chaque élément.

En remarquant que  $m$  est supérieur à 1, factoriser cette expression.

Vérifier que les deux constantes de temps obtenues alors sont peu différentes des constantes de temps électrique et électromécanique du moteur définies par :

$$T_E = \frac{L}{R} \quad T_{EM} = \frac{RJ}{K^2 + Rf}$$

Cette dernière constante est improprement appelée constante de temps électromécanique.

## 2 Etude du système sans contre réaction

### 2.1 Amplification de puissance

Un amplificateur linéaire de puissance fournit le courant nécessaire au fonctionnement du moteur. Cet amplificateur peut être modélisé comme un premier ordre de gain en tension unitaire et de fréquence de coupure 100 kHz.

Compte tenu des ordres de grandeur des constantes du moteur, proposer un modèle pour l'amplificateur.

### 2.2 Performances statiques

Tracer la caractéristique statique  $\Omega=f(U_C)$  de l'ensemble amplificateur moteur charge ( $U_C$  étant la tension de consigne à l'entrée de l'amplificateur,  $U_C$  variant de -12 V à 12 V) dans les trois cas suivants :

- résistance  $R$  négligée
- couple résistant  $C_R$  nul
- $C_R$  de valeur quelconque (on tracera pour 0,02 Nm)

Conclure sur la précision du montage réalisé (raisonner par exemple sur des variations de  $C_R$ ).

### 2.3 Performance dynamique

On supposera  $C_R$  nul

Afin d'estimer la rapidité du montage déterminer à l'aide des abaques fournis la bande passante à -3 dB, ainsi que le temps de réponse à 5% vis à vis d'un échelon de consigne.

Dans le cas où le couple résistant  $C_R$  est non nul, mais constant, ces valeurs sont elles changées. Que dire de la stabilité du montage.

### 2.4 Simulation

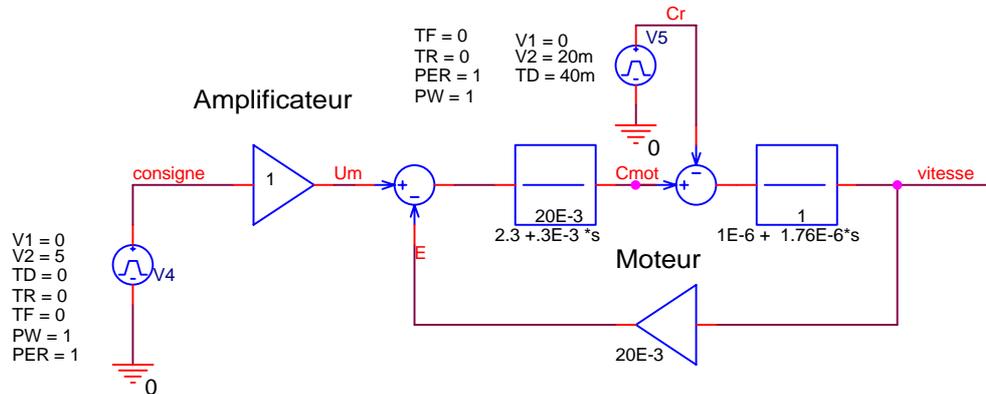
Pour effectuer nos simulations, nous utiliserons des blocs de la librairie **Abm** du répertoire **Pspice** qui permettent une modélisation comportementale. Le composant simulé n'est donc plus décrit par son

## étude de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu faible puissance

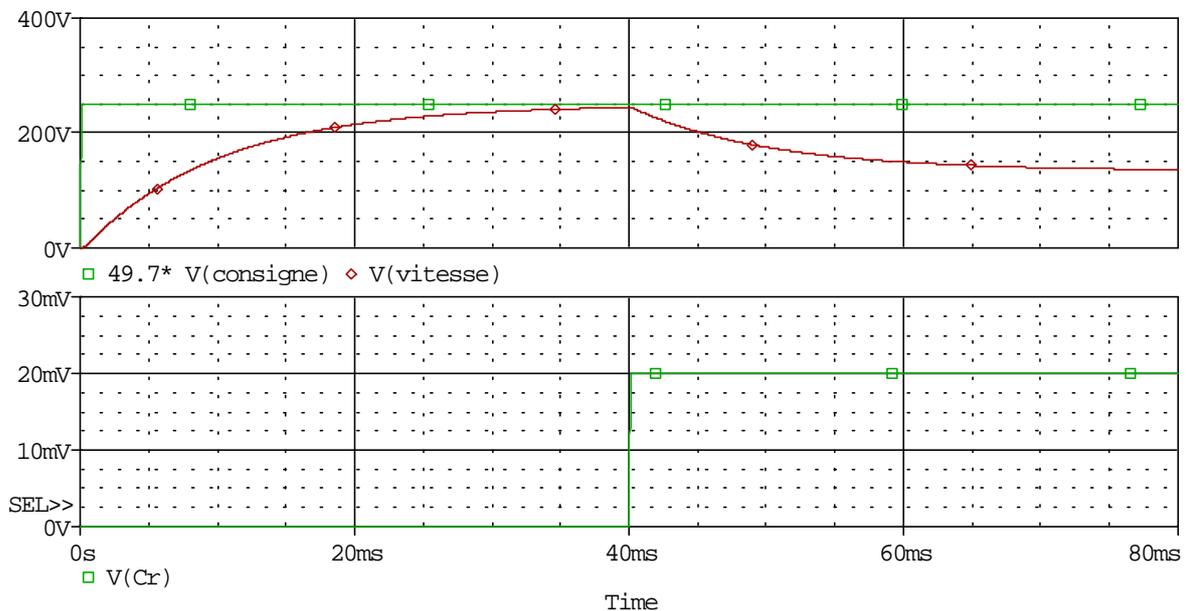
schéma structurel mais par une équation décrivant son comportement (une transformée de Laplace par exemple).

Ouvrir un nouveau projet (**File / New / Project**, puis donner un nom en vérifiant que "**Analog or Mixed Signal Circuit Wizard**" est validé ; ajouter la bibliothèque **Abm** à celle proposées).

Décrire alors le schéma bloc correspondant au moteur (éléments **LAPLACE**, **GAIN** et **DIFF** de la bibliothèque **ABM**) associé à l'amplificateur de puissance. Ce dernier est décrit par un simple gain. On placera également des sources de type impulsionnelle pour l'entrée et le couple résistant.



Sur les résultats suivants de la simulation, on peut observer la réponse à un échelon de consigne, pour un couple résistant nul à l'origine. Au bout de 30 ms la charge du moteur change et le couple passe à 20 mNm. Le premier chronogramme représente la vitesse réelle et la vitesse attendue dans le cas idéal, le second le couple résistant. La vitesse attendue est obtenue en multipliant simplement la consigne par le gain basse fréquence  $K_M$  du moteur.



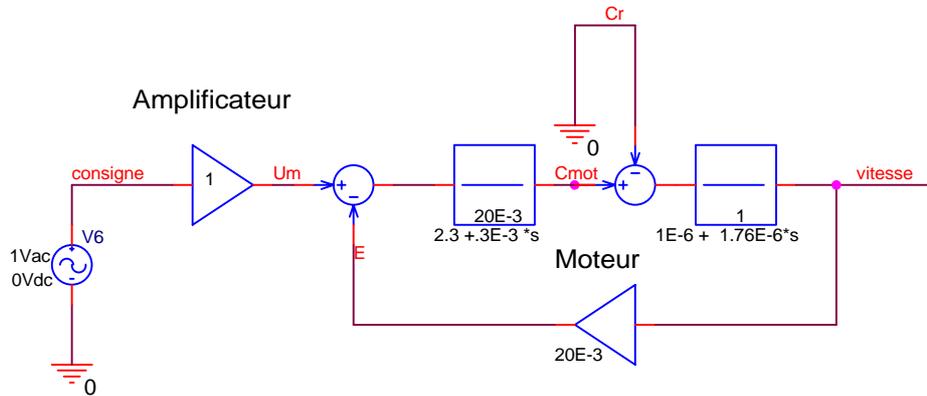
On peut noter dans la première partie de la courbe que le moteur se comporte quasiment comme un système du premier ordre, avec une constante de temps de l'ordre de 10 ms, ce qui correspond à la constante de temps électromécanique dominante par rapport à la constante de temps électrique. La valeur finale de la vitesse tend vers la valeur idéale, le couple résistant étant nul et les pertes négligées.

Au bout de 40 ms le couple résistant passe de 0 à 20 mNm et la vitesse décroît alors de manière importante. On vérifie donc bien que la vitesse ne dépend pas uniquement des valeurs imposées par la commande. Un asservissement est donc nécessaire si on souhaite une certaine précision.

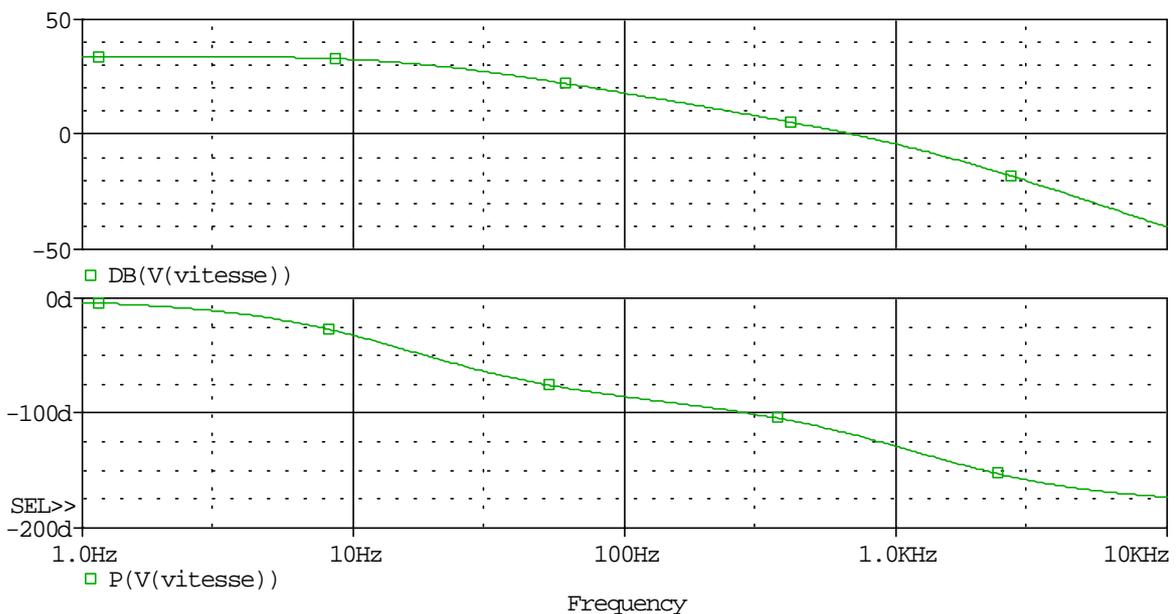
## étude de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu faible puissance

On peut constater sur les courbes précédentes que le temps de réponse du système à un échelon de consigne ou à une perturbation de couple est le même, alors que l'entrée ne se fait pas au même endroit sur le schéma bloc. La constante de temps mécanique  $J/f$  très grande devant la constante de temps électrique  $L/R$  fait que le système se comporte sensiblement comme un premier ordre de constante  $J/f$ , que l'on rentre en  $U_m$  ou en  $C_r$ .

Réalisons maintenant une simulation de la réponse fréquentielle. Pour cela, ouvrons un nouveau schéma dans lequel nous copierons le précédent en le modifiant comme suit.



La réponse fréquentielle prend alors l'allure ci-après, sur laquelle on peut vérifier quelques points particuliers : gain statique, première et seconde fréquence de coupure. Les deux fréquences de coupure étant éloignées, la première arrive pour un gain d'environ  $-3\text{dB}$  et pour une phase d'environ  $-45^\circ$ , alors que la seconde arrive avec une phase d'environ  $-90-45=-135^\circ$ .

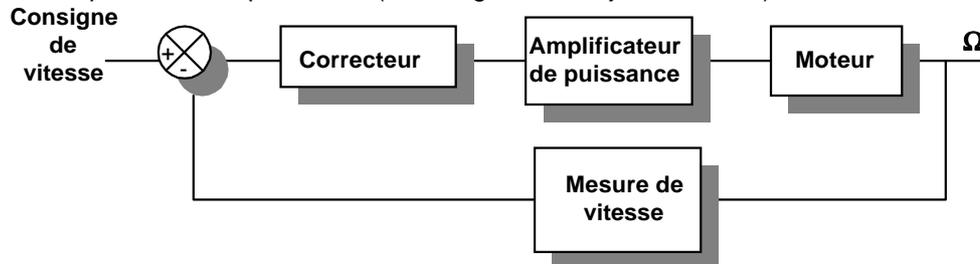


Les réponses harmoniques sont souvent difficiles à obtenir avec les systèmes réels. Le système doit en effet être « polarisé » dans une zone linéaire et la sollicitation ne doit pas l'en faire sortir, d'où la nécessité d'une attaque en petits signaux, qui posent alors de problème d'une sortie bruitée. Lorsque le système n'est pas suffisamment connu, ou trop complexe pour être modélisé par des équations, de méthodes d'identification des réponses impulsionnelles et indicielles sont généralement utilisées. Là encore la sollicitation ne doit pas faire sortir le système de la zone linéaire.

Le moteur que nous étudions actuellement étant parfaitement linéaire, nous nous sommes permis d'attaquer par un échelon de  $5\text{ V}$  ; pour être plus proche de la réalité, nous pourrions introduire des éléments non linéaires, par exemple la saturation de l'amplificateur de puissance ; nous verrons par la suite que cela limite fortement l'amplitude admissible à l'entrée.

### 3 Etude en boucle fermée avec correcteur proportionnel

On mesure maintenant la tension de sortie à l'aide d'une dynamo tachymétrique qui fournit une tension proportionnelle à la vitesse avec un gain de 0,02 (même valeur que la constante de couple du moteur). Cette tension est ensuite soustraite à la nouvelle valeur de consigne afin d'établir une tension d'erreur  $\varepsilon$  qui est amplifiée d'une valeur  $G_O$  par le correcteur (de type proportionnel), avant d'attaquer l'entrée de l'amplificateur de puissance (dont le gain est toujours unitaire).



Préciser la valeur de chaque bloc du schéma ci-dessus.

#### 3.1 Etude statique

Afin de mettre en évidence la précision de la réponse du montage vis à vis de la commande, on va s'intéresser à la valeur de l'erreur  $\varepsilon$  en régime établi (c'est à dire au bout d'un temps infini) lors d'une sollicitation. Cette erreur représente en effet la différence entre la valeur de consigne et la vitesse réellement obtenue.

##### 3.1.1 Echelon de consigne

La tension de consigne passe brutalement de 0 à une valeur constante  $U_O$  à  $t=0$ . Quel est sa transformée de Laplace  $U_C(p)$ ?

Déterminer l'expression de  $\varepsilon(p)/U_C(p)$  sans la développer.

Le théorème de la valeur finale nous donne la valeur d'une grandeur au bout d'un temps infini (en régime établi) :

$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

Déterminer la valeur de l'erreur en régime établi.

Conclure sur la valeur à donner à  $G_O$  et justifier par un raisonnement qualitatif cette conclusion.

##### 3.1.2 Perturbation par un échelon de couple

La charge du moteur varie brutalement et le couple  $C_R$  passe d'une valeur nulle à une valeur constante  $C_{R1}$ .

Etablir l'expression de l'erreur sur l'entrée perturbatrice  $\varepsilon(p)/C_R(p)$  sans la développer. On supposera pour cela que la consigne  $U_C$  reste constante. Si on s'intéresse aux variations autour d'un point de fonctionnement, sa transformée de Laplace est donc nulle.

En utilisant le théorème de la valeur finale, déterminer l'expression de l'erreur en régime établi.

Conclure sur la valeur à donner à  $G_O$  et justifier par un raisonnement qualitatif cette conclusion.

#### 3.2 Etude dynamique

Etablir l'expression  $H_{BF}(p)=\Omega(p)/U_C(p)$  de la fonction de transfert en boucle fermée.

Déterminer les nouvelles expressions de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement du montage par rapport aux valeurs précédentes.

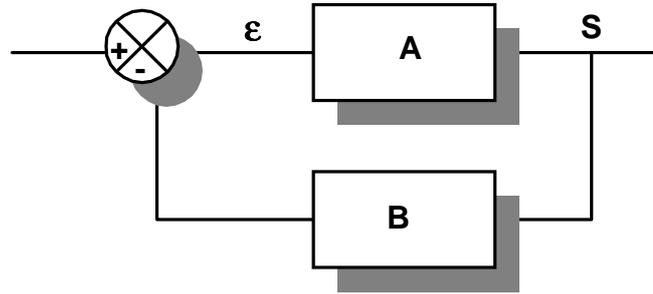
Conclure sur l'effet du rebouclage et sur l'influence de  $G_O$  sur la bande passante et sur la stabilité du montage. Risque t-on de trouver des valeurs particulières de  $G_O$  donnant un faible temps de réponse à l'échelon.

##### 3.2.1 Compromis rapidité stabilité

D'après la courbe représentant, pour un second ordre, le temps de réponse à 5% en fonction du facteur d'amortissement, donner la valeur optimale du facteur d'amortissement. Calculer la valeur de  $G_O$  correspondant, puis la pulsation propre et le temps de réponse à 5%.

### 3.2.2 Etude par la fonction de transfert en boucle ouverte

Dans le schéma bloc ci-dessous, établir l'expression de l'entrée sur la sortie.



Supposons que la phase de la fonction de transfert dite "en boucle ouverte" AB vaille  $-\pi$  pour une certaine pulsation  $\omega_{osc}$ . Mettre en évidence, par un simple raisonnement qualitatif, qu'une perturbation sinusoïdale de même pulsation dans la boucle se maintiendra pour une certaine valeur du gain de AB. Que devient cette perturbation si le gain augmente ou diminue.

La question précédente nous a montré que l'étude de la stabilité d'un système contre réactionné pouvait se limiter à l'analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Pour les fonctions de transfert du type de celle que nous avons (système à phase minimal, c'est à dire sans pôles ni zéros à partie réelle positive et sans retard pur), une méthode classique donnant un bon compromis consiste à choisir le gain de la boucle ouverte tel que lorsque sa valeur devient égale à 0 dB, la phase soit égale (au plus) à  $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$ ; c'est à dire garder une marge de phase de  $45^\circ$ . Montrer d'après l'étude faite à la question précédente que cette méthode permet d'obtenir un montage stable.

Calculer approximativement  $G_O$  pour obtenir une marge de phase à  $45^\circ$ .

Calculer alors les nouvelles valeurs du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre du système en boucle fermée. Quelle est le nouveau temps de réponse à l'échelon.

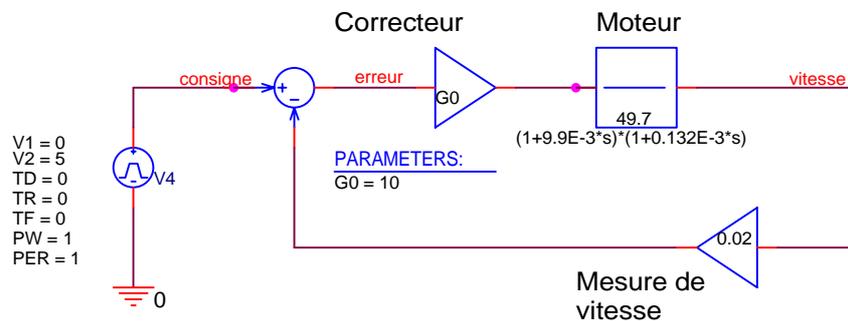
Comparer ces valeurs avec le choix précédent.

### 3.3 Conclusion

Conclure sur le compromis à trouver entre stabilité et précision. Quels éléments ont tendance à déstabiliser les systèmes ayant ce type de réponse (phase très supérieure à  $-\pi$  pour les basses fréquences, gain et phase diminuant avec la fréquence).

### 3.4 Simulation

Afin de clarifier le schéma, le moteur a été remplacé par une fonction de transfert à une entrée, l'entrée de couple résistant étant supprimée, ce dernier étant supposé constant, donc sa transformée de Laplace nulle pour le point de fonctionnement choisi. L'amplificateur de puissance a été également supprimé.

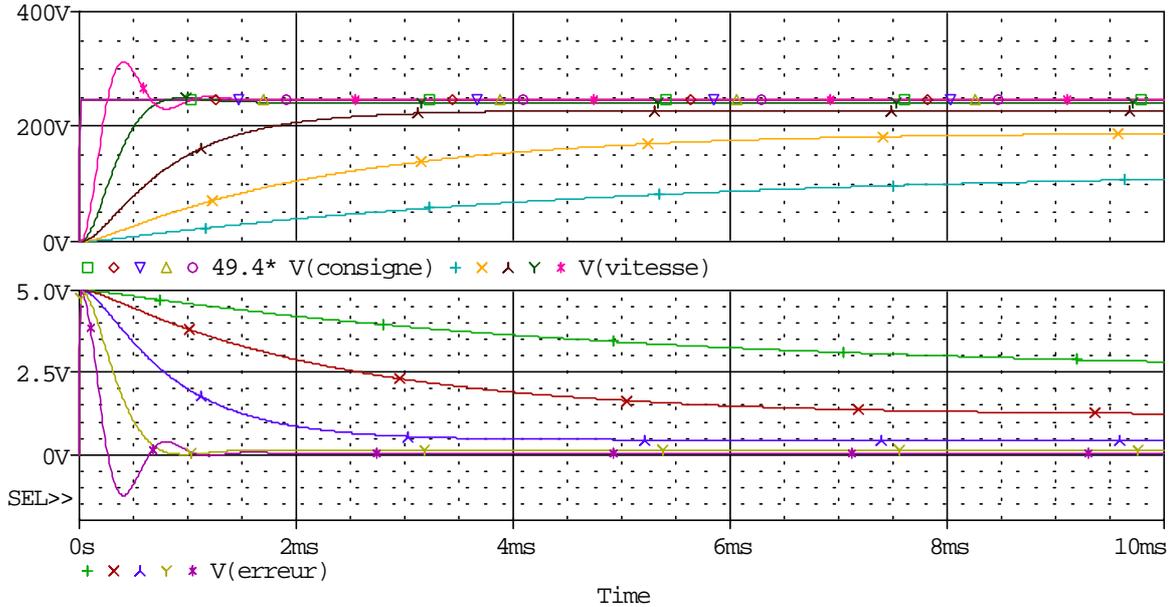


Le gain du correcteur a été défini sous forme de paramètre.

Pour cela on place sur le schéma l'élément **PARAM** de la bibliothèque **SPECIAL**, pour lequel après avoir édité ses propriétés par un double clic dessus, on définit une nouvelle propriété  $G_0$ , en rendant son nom et sa valeur (fixée à 10) visible.

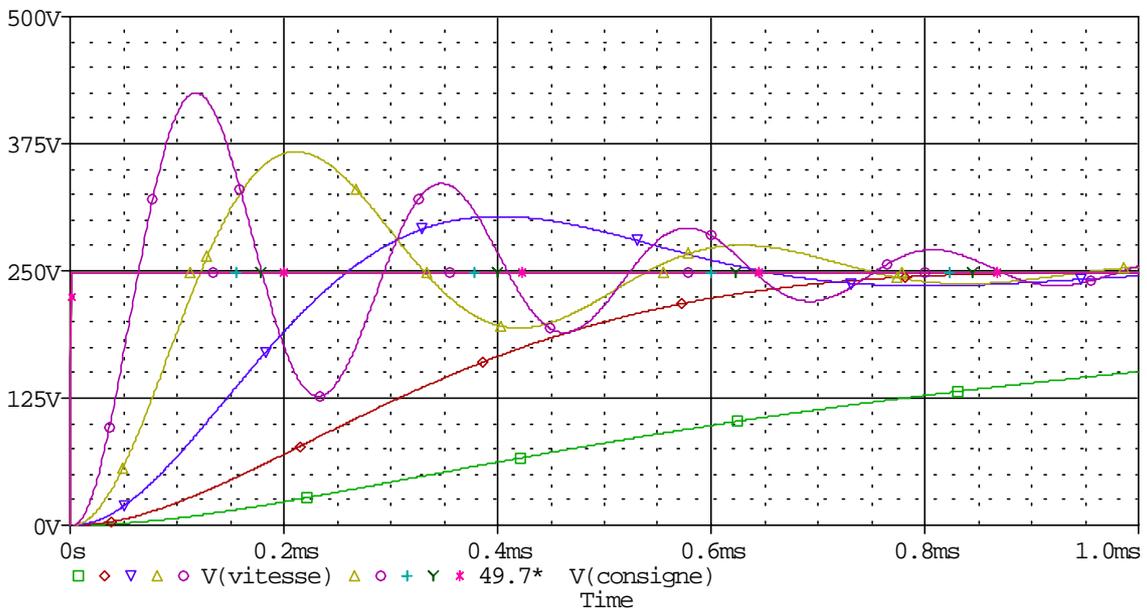
Une analyse paramétrique est alors possible : pour cela, valider la case correspondante dans le profil de simulation, déclarer un paramètre global  $G_0$ , et définir son domaine de variation. Dans les courbes ci-après, nous avons opté pour une variation logarithmique de 1 à 100 avec 2 points par décade (pas de calcul de 0,01 ms).

étude de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu faible puissance



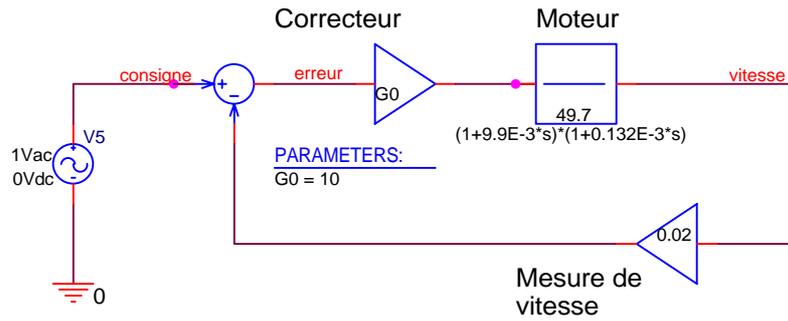
Sur la première courbe sont affichés la réponse indicielle pour les gains  $G_0$  de 1, puis 3,16 puis 10 puis 31,6 puis 100 (de la courbe la plus basse à la plus haute). La courbe en échelon de la réponse idéale permet de voir ce qui est attendu. On constate bien que plus le gain est faible, plus on s'éloigne de ce résultat. Cette constatation peut également être faite en observant l'erreur statique qui croît avec le gain.

Ci-après (attention l'échelle des temps est différente), on retrouve également la réponse indicielle pour des gains  $G_0$  de 10 puis 31,6 puis 100 puis 316 puis 1000. On peut noter que l'erreur statique par rapport à la vitesse attendue diminue lorsque le gain augmente, mais que le système tend à devenir instable (la pulsation d'oscillation dépend alors du gain comme l'ont montré les calculs théoriques).

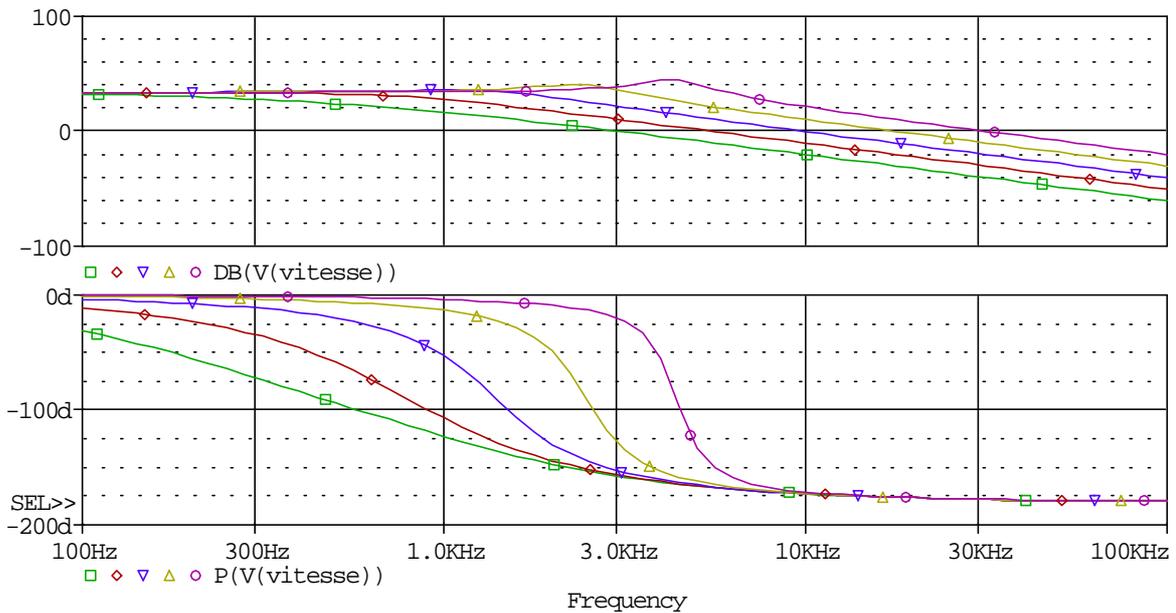


Observons maintenant ce qui se passe d'un point de vue fréquentiel, en boucle fermée dans un premier temps.

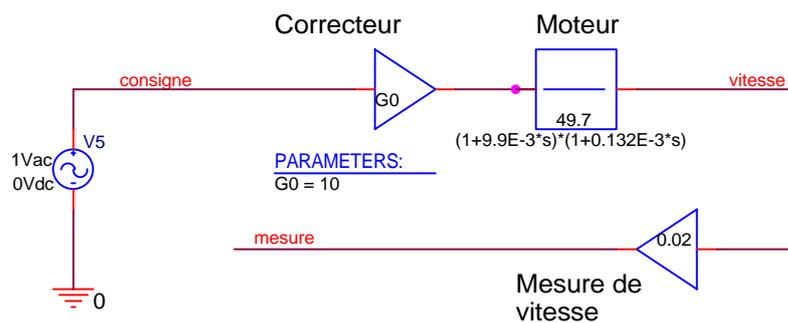
## étude de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu faible puissance



Les courbes suivantes représentent le diagramme de Bode en boucle fermée pour les valeurs de gain allant de 10 à 1000. Plus le gain est important, plus la bande passante augmente, mais comme l'a montré la réponse indicielle, le montage tend à devenir instable (noter l'apparition d'une résonance).

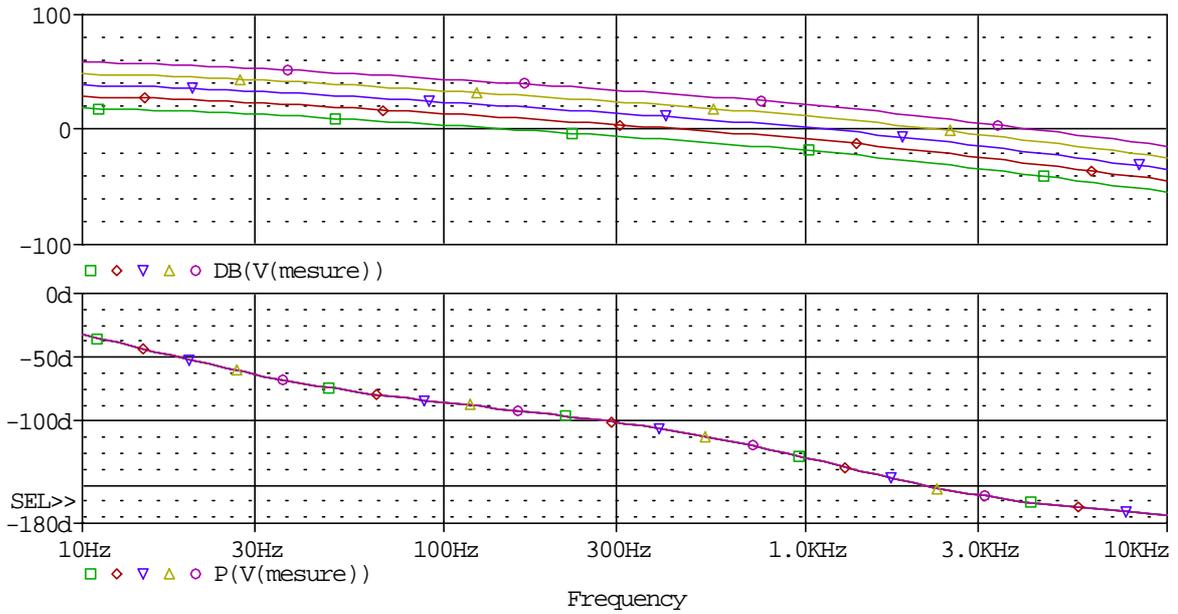


Vérifions ces données maintenant avec la boucle ouverte.

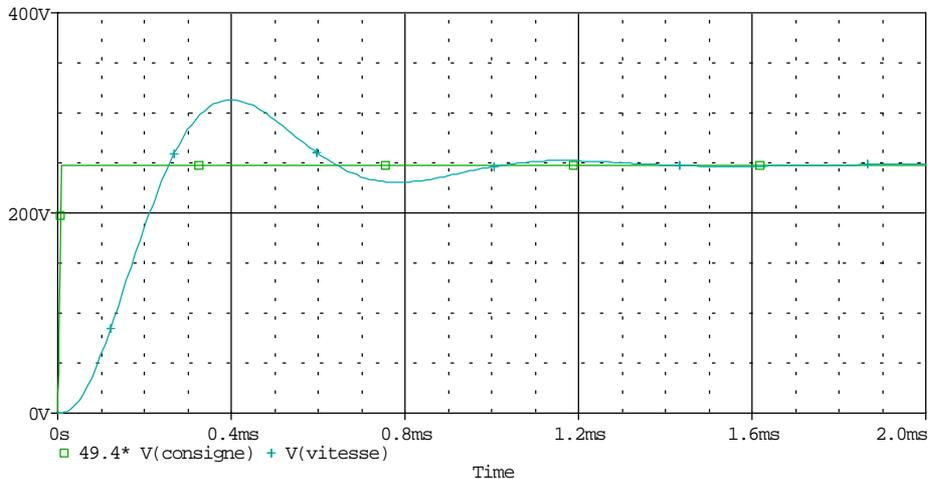
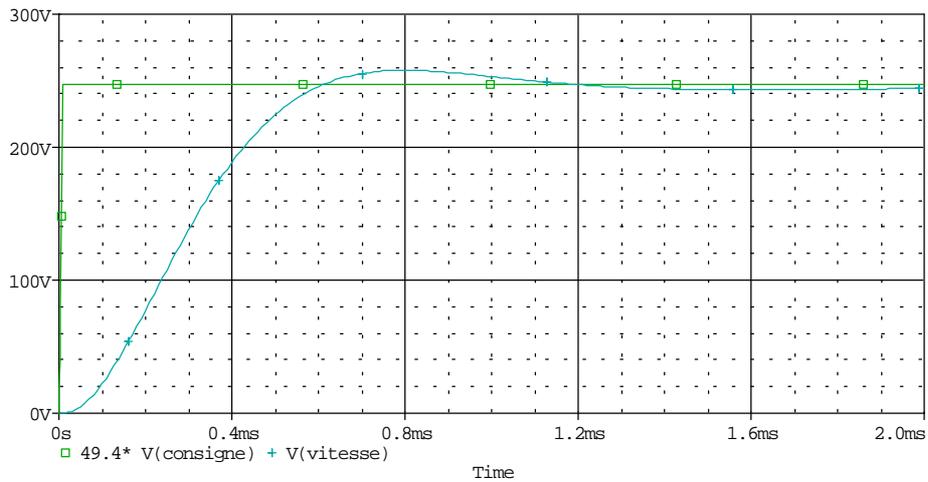


Toujours pour les mêmes valeurs de gain, on peut voir, comme le prévoit la théorie, que les courbes de phase ne dépendent pas de  $G_0$ , tandis que les courbes de gain se traduisent vers le haut au fur et à mesure de l'augmentation de ce paramètre, diminuant d'autant la marge de phase.

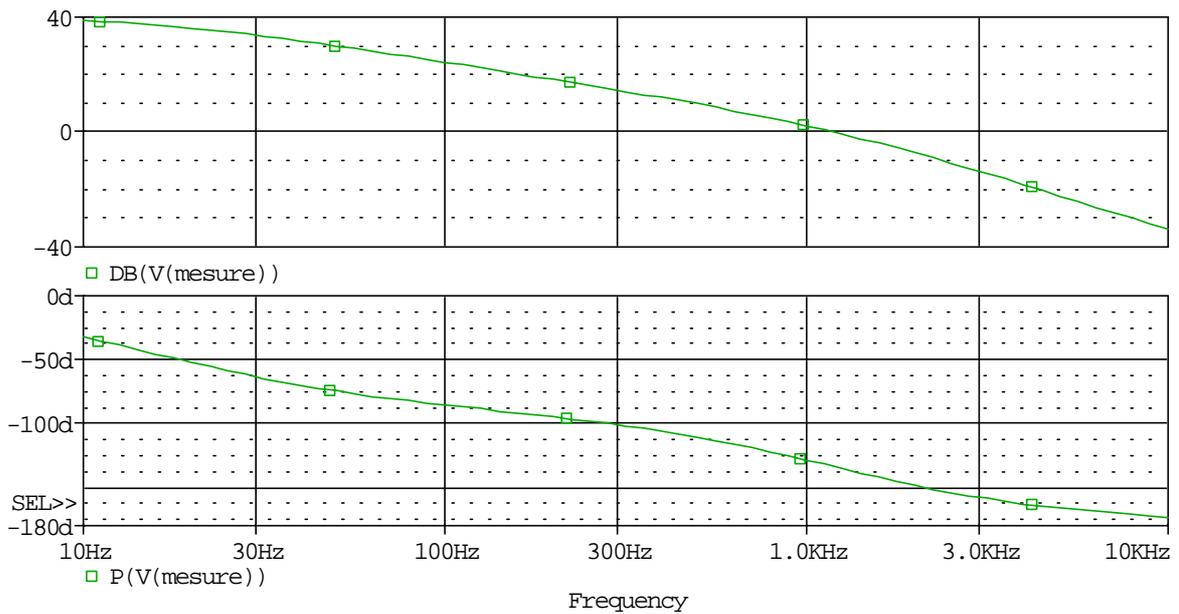
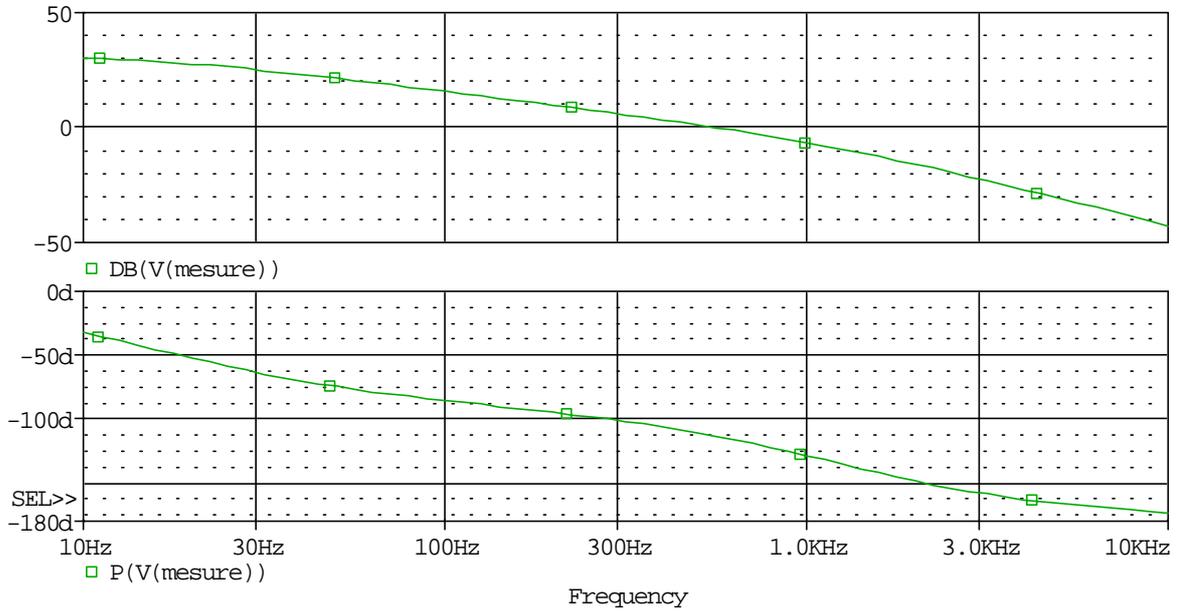
étude de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu faible puissance



Observons maintenant les réponses indicielles des deux gains optimaux obtenus l'un 38,5 en minimisant le temps de réponse à 5%, et l'autre 104 en appliquant le critère de marge de phase à 45°. Dans le premier cas, la montée est moins rapide, mais il n'y a presque pas de dépassement (4,5%) contrairement à la seconde courbe (20%). Les deux temps de réponse à 5% ont des valeurs similaires, respectivement 548 et 557 ms.



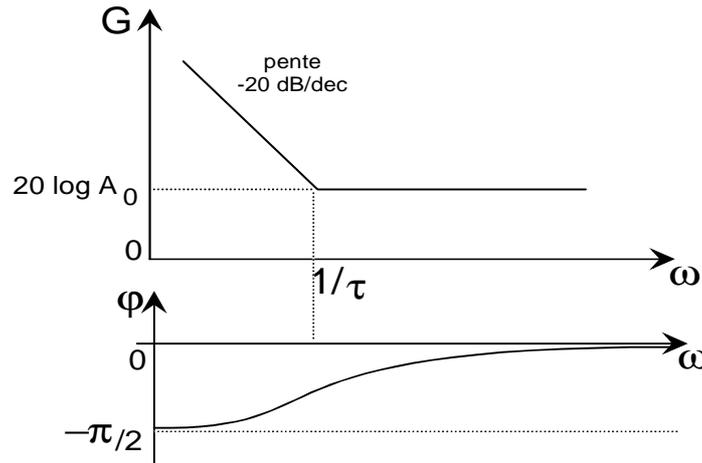
Les courbes de Bode suivantes proposent une étude de la fonction de transfert en boucle ouverte. Sur la première, qui correspond au cas où  $G_0$  vaut 38,5, on remarque une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ , d'où un comportement moins oscillant de la réponse indicielle. Sur la seconde la marge de phase est rigoureusement  $45^\circ$  puisqu'il s'agit du critère choisi.



## 4 Etude en boucle fermée avec un correcteur proportionnel intégral

### 4.1 Etude théorique

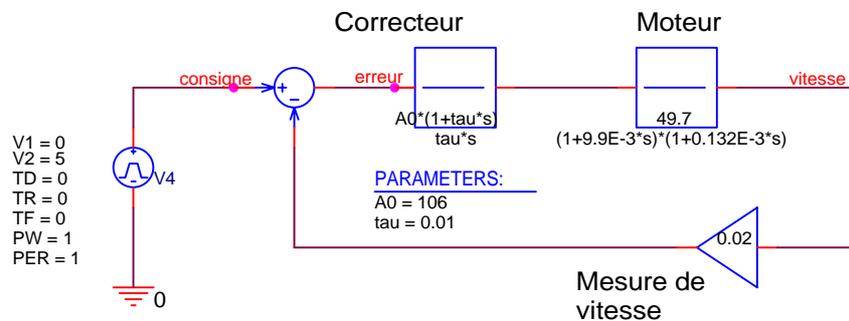
Le gain  $G_0$  du correcteur est maintenant remplacé par un quadripôle dont la réponse fréquentielle est la suivante.



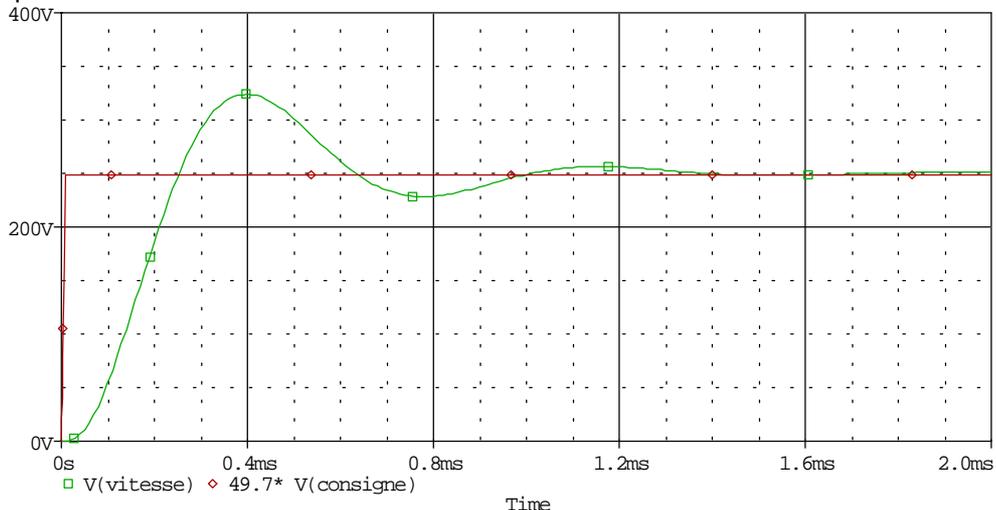
Proposer une réalisation autour d'un amplificateur opérationnel de ce type de quadripôle.  
 Montrer comment, si les coefficients  $A_0$  et  $\tau$  sont correctement choisis, ce montage permettra d'obtenir une erreur nulle tout en ne déstabilisant pas le système.  
 Une méthode classique consiste à choisir  $\tau$  de manière à compenser le pôle dominant du système, c'est à dire dans notre cas  $\tau = T_{EM}$ .  
 Déterminer alors  $A_0$  pour avoir une marge de phase à  $45^\circ$ .  
 Calculer maintenant les nouveaux coefficients d'amortissement, pulsations propre et temps de réponse à 5% du système en boucle fermée.  
 Vérifier, par un raisonnement qualitatif, la nullité de l'erreur, tant vis à vis de la consigne que d'une perturbation.  
 Comparer avec les résultats précédents.

## 4.2 Simulation

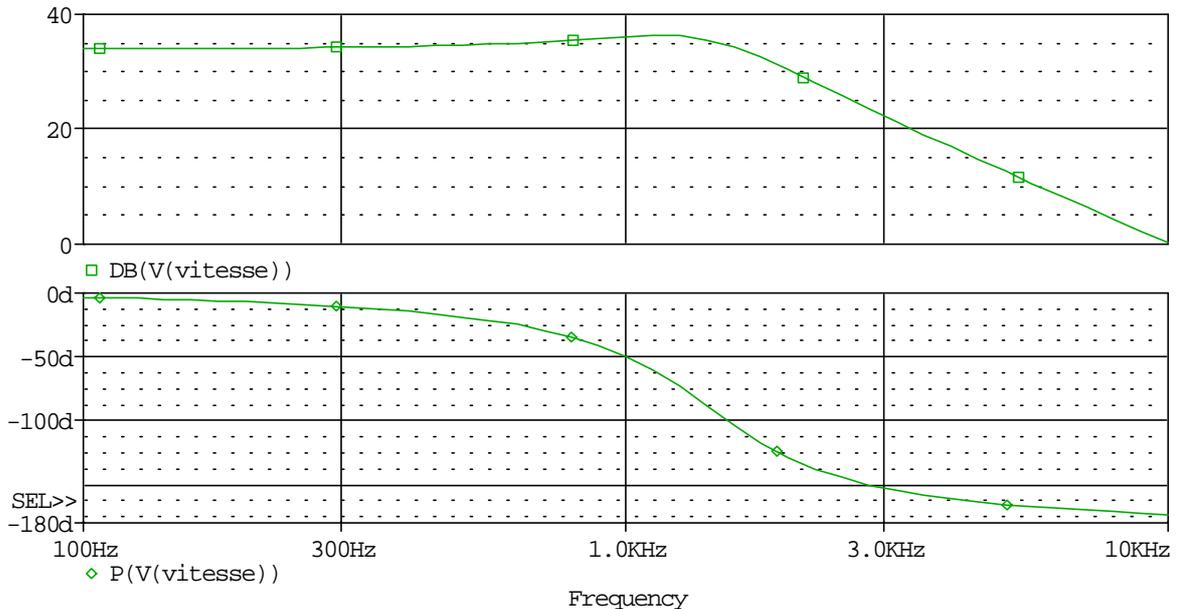
Le correcteur de la simulation précédente est remplacé par celui qui vient d'être calculé.



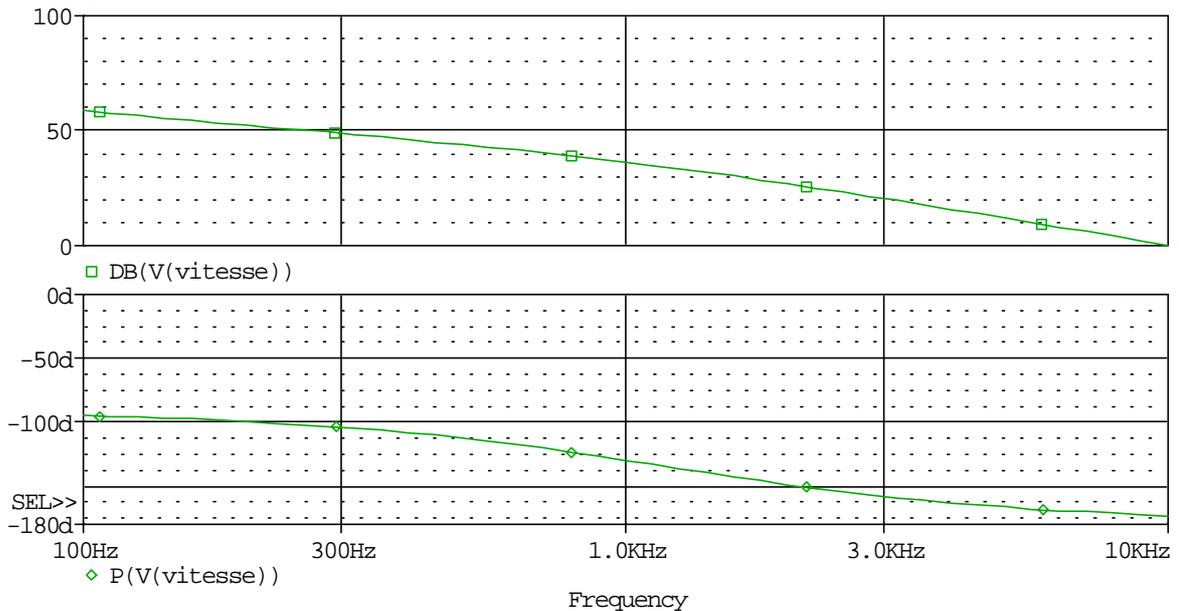
Une réponse à l'échelon montre un temps de réponse similaire aux temps précédents, mais avec une erreur statique nulle.



Comme prévu, la bande passante en boucle fermée est du même ordre de grandeur que celle du correcteur proportionnel.



La fonction de transfert en boucle fermée montre bien une marge de phase à 45° lorsque le gain atteint 0 dB.



## 5 Limite de validité

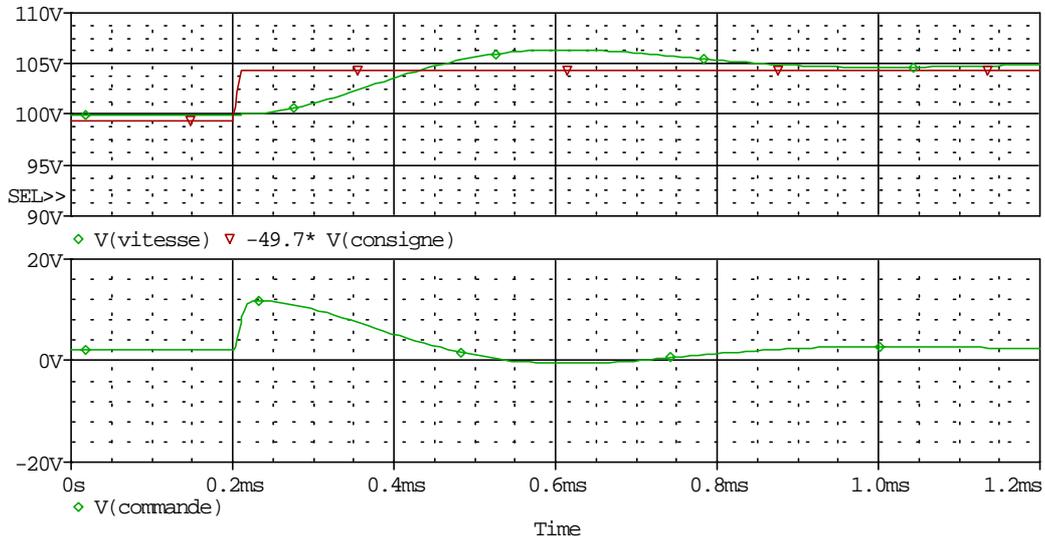
Quelle hypothèse simplificatrice avons nous fait pour établir ces résultats. Dans quelle limite restent-ils valables.

Le montage ci-après propose un montage où un amplificateur opérationnel (TL082 de la bibliothèque **OPAMP**) réalise à la fois le soustracteur et le correcteur avec les constantes calculées précédemment. Afin de pouvoir faire la différence entre consigne et mesure, la première est représentée par une tension négative.



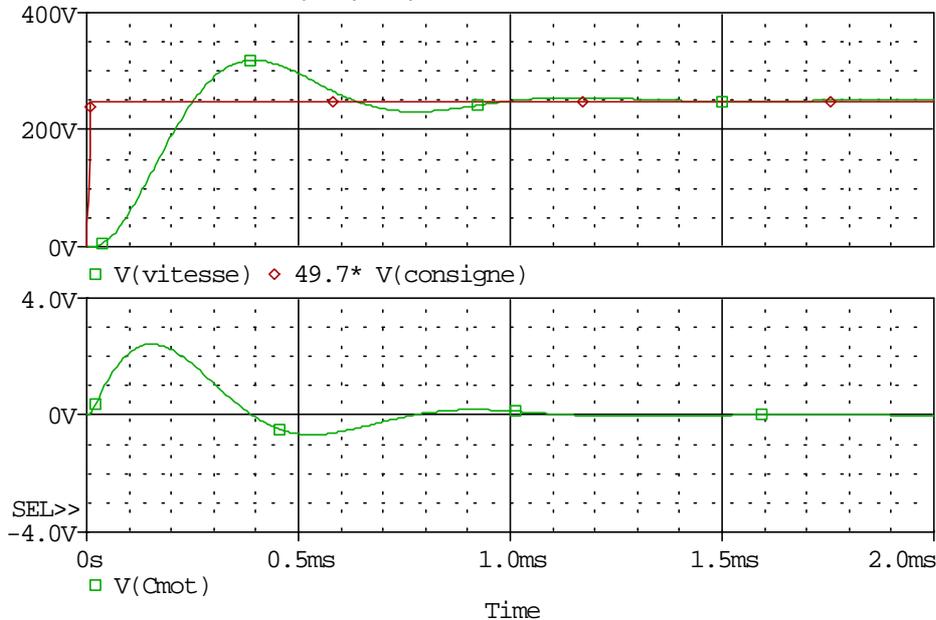
Ci-après un échelon de consigne partant non plus de 0, mais 2 V vers 2,1V (dans le profil de simulation, on dévalide l'option permettant d'ignorer le point de polarisation afin d'éviter d'avoir deux régimes transitoires). On vérifie bien dans ce cas que si on reste en zone linéaire, on obtient bien les constantes de temps attendues.

On peut noter également sur ces courbes que l'erreur statique n'est pas tout à fait nulle (comparer la courbe de vitesse réelle à la courbe de vitesse idéale). La différence est due aux imperfections statiques de l'amplificateur opérationnel (courant et tension de décalage).



Pour obtenir les courbes suivantes, nous avons remplacé le moteur par son schéma complet (celui utilisé lors de la première simulation), de manière à avoir accès au couple moteur. On rappelle que celui-ci est directement proportionnel au courant absorbé par le moteur (avec les hypothèses simplificatrices que nous avons prises sur les pertes). Comme on peut le constater, en régime établi, pour un couple résistant nul, le couple moteur est également nul, alors qu'en régime transitoire, il est loin d'être négligeable.

Une amélioration possible de notre asservissement serait d'asservir dans un premier temps le courant dans le moteur afin de contrôler le couple, puis par une seconde boucle la vitesse.



## 5.1 Documents fournis

Moteur Escap 28D11

Table de transformées de Laplace

Réponses fréquentielles d'un second ordre

Réponses impulsionnelles et indicelles d'un second ordre